26/10/2017.

2ª μέθοδος Μαθηματικής Επαγωγής

Έστω $n_0 \in \mathbb{N}$ και $P(n)$ μια πρόταση που εξαρτάται από τον φυσικό αριθμό $n \geq n_0$. Αν i.) $P(n_0)$ είναι αληθής και ii.) για κάθε $n > n_0$ ισχύει: αν η $P(n)$ αληθής για κάθε m (φυσ. αρ.) τ.ω. $n_0 \leq m < n$ => $P(n)$ αληθής. Τότε $P(n)$ αληθής για κάθε $n \geq n_0$

$\mathbb{N}$ 1 2 3 n_0 m $n-1$ n

i.) $P(n_0)$ αληθής

ii.) $P(m)$ αληθής $\forall\, m: n_0 \leq m < n \Rightarrow P(n)$ αληθής

Τότε $P(n)$ αληθής για όλα τα $n \geq n_0$

Ακολουθία Fibonacci:

$F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$, $F_8 = 21$ ...

$F_1 = 1$, $F_2 = 1$, ..., $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Πρόταση: Για κάθε $n \geq 1$ ισχύει: $P(n)$: $F_n < \left(\frac{7}{5}\right)^n$

$P(1) = F_1 = 1 < \left(\frac{7}{4}\right)^1$ αληθής

$P(2) = F_2 = 1 < \left(\frac{7}{4}\right)^2$ αληθής

Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάθε $m: 1 \leq m < n$ ότι

$$F_m < \left(\frac{7}{4}\right)^m.$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} < \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} + \left(\frac{7}{4}\right)^{n-2} = \left(\frac{7}{4}\right)^{n-2}\left(\frac{7}{4} + 1\right) =$$

$$= \left(\frac{7}{4}\right)^{n-2}\left(\frac{11}{4}\right) = \left(\frac{7}{4}\right)^{n-2}\frac{44}{16} < \left(\frac{7}{4}\right)^{n-2}\frac{49}{16} = \left(\frac{7}{4}\right)^{n-2}\left(\frac{7}{4}\right)^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^n \checkmark$$

Διώνυμο του Νεύτωνα.

$$(\alpha+\beta)^n = \alpha^n + \binom{n}{1}\alpha^{n-1}\beta + \binom{n}{2}\alpha^{n-2}\beta^2 + \dots + \binom{n}{j}\alpha^{n-j}\beta^j + \dots + \binom{n}{n}\beta^n$$

$$\boxed{(\alpha+\beta)^3} = \alpha^3 + \binom{3}{1}\alpha^2\beta + \binom{3}{2}\alpha\beta^2 + \binom{3}{3}\beta^3 =$$

$$= \alpha^3 + \frac{3!}{1!(3-1)!}\alpha^2\beta + \frac{3!}{2!(3-2)!}\alpha\beta^2 + \frac{3!}{3!\,0!} =$$

$$= \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 \checkmark$$

$$\boxed{(\alpha+\beta)^5} = \alpha^5 + \binom{5}{1}\alpha^4\beta + \binom{5}{2}\alpha^3\beta^2 + \binom{5}{3}\alpha^2\beta^3 + \binom{5}{4}\alpha\cdot\beta^4 + \binom{5}{5}\beta^5 =$$

$$= \alpha^5 + \frac{5!}{1!(5-1)!}\alpha^4\beta + \frac{5!}{2!(5-2)!}\alpha^3\beta^2 + \frac{5!}{3!(5-3)!}\alpha^2\cdot\beta^3 + \frac{5!}{4!(5-4)!}\alpha\cdot\beta^4 + \frac{5!}{5!(5-5)!}\beta^5 =$$

$$= \alpha^5 + 5\alpha^4\beta + 10\alpha^3\beta^2 + 10\alpha^2\beta^3 + 5\alpha\beta^4 + 1\cdot\beta^5 \checkmark$$

Πρόταση: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Τρίγωνο του Pascal:

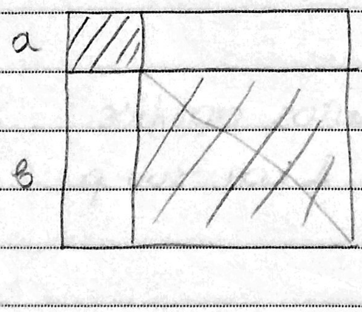
Fibonacci

τετραγωνικοί αριθμοί

```
            1
          1   1
        1   2   1
      1   3   3   1
    1   4   6   4   1
  1   5  10  10   5   1
1   6  15  20  15   6   1
```

7η γραμμή

$$(\alpha+\beta)^7 = 1\cdot\alpha^7 + 7\alpha^6\beta + 21\alpha^5\beta^2 + 35\alpha^4\beta^3 + 35\alpha^3\beta^4 + 21\alpha^2\beta^5 + 7\alpha\beta^6 + \beta^7$$



$$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

"Διαιρότητα"

<u>Ορισμός</u>: Ο ακέραιος $α$ διαιρεί τον ακέραιο $β$ (και θα το συμβολίζουμε $α|β$) αν υπάρχει ακέραιος $γ$ τέτοιο ώστε $β=αγ$.

$α|β \overset{ορισ.}{\Longleftrightarrow} β=αγ \ , \ γ\in\mathbb{Z}$

$α$ διαιρεί το $β$ και $β$ πολλαπλάσιο του $α$

$α\nmid β$ ($α$ δεν διαιρεί το $β$)

π.χ. $3\nmid 5$ και $4|12$

→ Ιδιότητες:

1.) $α|0 \ , \ \forall \ α\in\mathbb{Z}$

2.) $0|β \rightarrow β=0$

3.) $α|β \Leftrightarrow -α|β \Leftrightarrow -α|-β \Leftrightarrow α|-β \Leftrightarrow |α|\,|\,|β|$ → φυσικοί αριθμοί

απόδειξη: $α|β \Leftrightarrow β=αγ \Leftrightarrow -β=α(-γ) \Leftrightarrow α|-β$ ✓

4.) $α|α$ για κάθε $α\in\mathbb{Z}$

5.) $1|α$ για κάθε $α\in\mathbb{Z}$

6.) Αν $α|β$ κ' $β|γ$ τότε $α|γ$

απόδειξη: × $β=αγ$ (δεν μπορώ να βάλω ξανά $γ$), $β=αδ$, $γ=βε$, $γ=βε=(αδ)ε=α(δε)$ $\Rightarrow α|γ$ ✓

! 7.) $α|β$ και $α|γ \Rightarrow α|κβ+λγ \ , \ κ,λ\in\mathbb{Z}$

8.) Αν $α|β$ και $γ|δ \Rightarrow αγ|βδ$

9.) Αν $α|β \rightarrow αγ|βγ$

10.) Αν $α|β$ και $β\neq 0$: $|α|\leq|β|$

11.) Αν $α|β$ και $β|α \Rightarrow |α|=|β|$

2020 12.) $α,β\in\mathbb{N}$. Αν $α|β$ και $β|α \Leftrightarrow α=β$

<u>Ορισμός</u>: Ένας φυσικός αριθμός $ρ>1$ λέγεται πρώτος αριθμός αν έχει ακριβώς δύο φυσικούς διαιρέτες τον 1 και τον $ρ$.
(Το 1 δεν είναι πρώτος)

<u>Ορισμός</u>: Ένας φυσικός αριθμός $m>1$ λέγεται σύνθετος αν δεν είναι πρώτος.

m σύνθετος : $m = \alpha \cdot \beta$

$1 < \alpha < m$ $\quad$ $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$

$1 < \beta < m$

$\mathbb{N}$
- $\{1\}$
- πρώτος αριθμός
- σύνθετος

πρώτοι αρ. $\quad$ σύνθετοι

$\boxed{πχ}$ $\boxed{1}$ 2 3 $\boxed{4}$ 5 $\boxed{6}$ 7 $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ $\boxed{10}$ 11 $\boxed{12}$ 13 $\boxed{14}$ $\boxed{15}$

$\boxed{16}$ 17 $\boxed{18}$ 19 $\boxed{20}$ $\boxed{21}$ $\boxed{22}$ 23 $\boxed{24}$ $\boxed{25}$ $\boxed{26}$ $\boxed{27}$ $\boxed{28}$ 29 $\boxed{30}$

31 $\boxed{32}$ $\boxed{33}$ $\boxed{34}$ $\boxed{35}$ $\boxed{36}$ 37 $\boxed{38}$ $\boxed{39}$ $\boxed{40}$